"به نام خدا"

پاسخ سوالات چهارگزینه ای هندسه ۱:

۱- گزینه‌ی «۳» اندازه‌ی زوایا را به صورت $\hat{A}=8x$ و $\hat{B}=5x$ و $\hat{C}=2x$ در نظر می‌گیریم.

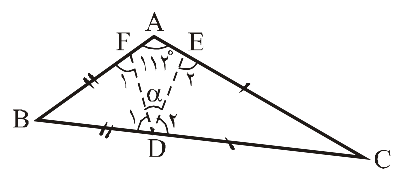
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 8x+5x+2x=180^\circ \Rightarrow 15x=180^\circ \Rightarrow x=12^\circ$$

$$\Rightarrow A=96^\circ \quad \text{و} \quad B=60^\circ \quad \text{و} \quad \hat{C}=24^\circ$$

کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی مثلث، مربوط به بزرگ‌ترین زاویه‌ی داخلی مثلث است.

$$\Rightarrow 180-\hat{A}=180-96^\circ=84^\circ$$

۲-گزینه‌ی «۲»



$BF=BD \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{F}_1$

$CD=CE \Rightarrow \hat{D}_2=\hat{E}_2$

مثلث BFD : $\hat{D}_1+\hat{F}_1+\hat{B}=180^\circ$ (۱)

مثلث CED : $\hat{D}_2+\hat{E}_2+\hat{C}=180^\circ$ (۲)

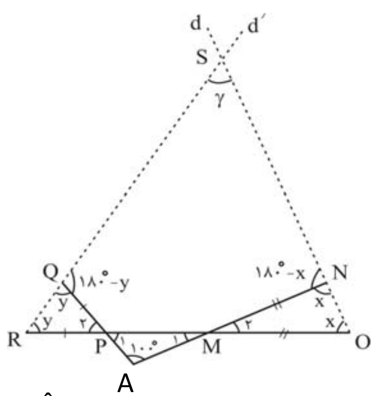
(۱) و (۲) $\Rightarrow \hat{D}_1+\hat{D}_2+\hat{F}_1+\hat{E}_2+\hat{B}+\hat{C}=360^\circ \Rightarrow \hat{D}_1+\hat{D}_2+\hat{D}_1+\hat{D}_2+(180^\circ-112^\circ)=360^\circ$

$\Rightarrow 2(\hat{D}_1+\hat{D}_2)=292 \Rightarrow \hat{D}_1+\hat{D}_2=146^\circ \Rightarrow \alpha=180^\circ-(\hat{D}_1+\hat{D}_2)=180^\circ-146^\circ=34^\circ$

۳- گزینه‌ی «۲» در چهارضلعی ANSQ ، مجموع زاویه‌های داخلی 360° است، پس:

$$100^\circ+(180^\circ-x)+\gamma+(180^\circ-y)=360^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma=(x+y)-100^\circ \quad (*)$$



در دو مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{MNO}$ و $\overset{\Delta}{PQR}$ ، می‌توانیم بنویسیم:

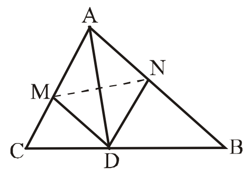
$$\begin{cases}\hat{M}_1=\hat{M}_2=180^\circ-2x\\ \hat{P}_1=\hat{P}_2=180^\circ-2y\end{cases}$$

و هم‌چنین در مثلث $\overset{\Delta}{AMP}$ ، داریم:

$$\hat{A}+\hat{M}_1+\hat{P}_1=180^\circ \Rightarrow 100^\circ+(180^\circ-2x)+(180^\circ-2y)=180^\circ \Rightarrow x+y=140^\circ$$

و نهایتاً از رابطه‌ی (*) نتیجه می‌شود: $\gamma=140^\circ-100^\circ=40^\circ$.

۴- گزینه‌ی «۴»



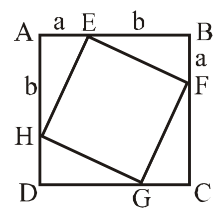
چون DM و DN موازی اضلاع مثلث رسم شده‌اند، پس چهارضلعی DMAN یک متوازی‌الاضلاع است.

در متوازی‌الاضلاع قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند، از طرفی AD نیم‌ساز نیز می‌باشد و متوازی‌الاضلاعی که در آن قطرها نیم‌ساز زوایا نیز هستند، لوزی است.

در لوزی قطرها بر هم عمود هستند، پس MN و AD عمودمنصف یک‌دیگرند.

۵-گزینه‌ی «۲»

ABCD مساحت مربع $S = AB^2 = (a+b)^2$



EFGH مساحت مربع $S' = EF^2 = a^2 + b^2$

$$\frac{S'}{S} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{5}{8} \Rightarrow 8a^2 + 8b^2 = 5a^2 + 5b^2 + 10ab$$

$$\Rightarrow 3(a^2+b^2) = 10ab \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{a}{b} = x \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3 \ , \ \frac{1}{3}$$

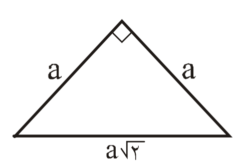
۶-گزینه‌ی «۱»

اگر a اندازه ی ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین باشد، آنگاه طول وتر با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس برابر $a\sqrt{2}$ است و محـیط آن عبارت است از:

$$a + a + a\sqrt{2} = 2a + a\sqrt{2} = 6(1+\sqrt{2})$$

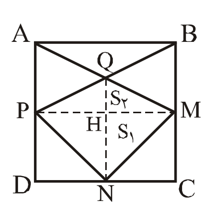
$$\sqrt{2}a(\sqrt{2}+1) = 6(1+\sqrt{2}) \Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2}a \times a = \frac{1}{2}(3\sqrt{2})(3\sqrt{2}) = 9$$



۷-گزینه‌ی «۳» مساحت چهارضلعی MNPQ برابر است با مجموع مساحت‌های دو مثلث PNM و PQM که مطابق شکل آن‌ها را S_1 و S_2 می‌نامیم:

$$S_1 = \frac{1}{2}PM \times NH = \frac{1}{2}(a)(\frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}a^2$$



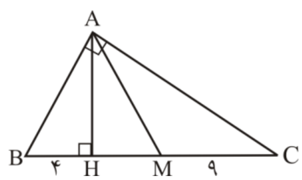
$S_2 = \frac{1}{2} PM \times QH = \frac{1}{2}(a)(\frac{1}{4}a) = \frac{1}{8}a^2$

$S_1 + S_2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}a^2 = \frac{3}{8}a^2$

مساحت مربع $\frac{3}{8}$ نیز MNPQ می‌باشد، پس مساحت چهارضلعی a^2 برابر ABCD با توجه به این که مساحت مربع ABCD است.

۸-گزینه‌ی «۴»

$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow AH^2 = 4 \times 9 \Rightarrow AH = 6$



$BC = BH + HC = 13$

$MH = BM - BH = \frac{13}{2} - 4 = \frac{5}{2}$

$S_{AHM} = \frac{1}{2} AH \times HM$

$S_{AHM} = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{5}{2} = 7/5$

۹-گزینه‌ی «۳»

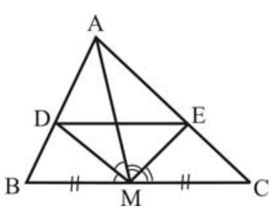
$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + 4AB^2 = 5AB^2$

$\Rightarrow \frac{BC^2}{AB^2} = 5 \Rightarrow \frac{BC^2}{BH \times BC} = \frac{BC}{BH} = 5$

دو مثلث ABC و ABH ارتفاع‌های یکسانی دارند (AH). در نتیجه نسبت مساحت‌هایشان برابر نسبت قاعده‌های آن‌هاست، بنابراین:

$\frac{\text{مساحت}ABC}{\text{مساحت}ABH} = \frac{BC}{BH} = 5$

۱۰-گزینه‌ی «۱»



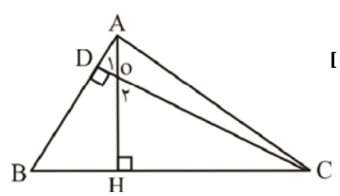
$\overset{\Delta}{ABM} \xrightarrow{\text{نیمساز } MD} \frac{AD}{DB} = \frac{AM}{BM} \qquad (1)$

$\overset{\Delta}{ACM} \xrightarrow{\text{نیمساز } ME} \frac{AE}{EC} = \frac{AM}{CM} \qquad (2)$

$BM = CM \xrightarrow{(1),(2)} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{عکس}} DE \| BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

۱۱-گزینه‌ی «۴»

$[= 36, AD = 12$

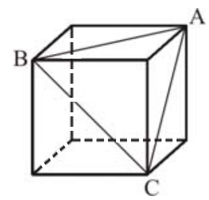


$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ متقابل به رأس} \\ \hat{D} = \hat{H} = 90^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{OAD} \sim \overset{\Delta}{OHC} \rightarrow \frac{OD}{OH} = \frac{AD}{HC}$

$$\Rightarrow \frac{2/4}{36}=\frac{12}{HC}\Rightarrow HC=\frac{12\times 36}{2/4}=180$$

۱۲-گزینه‌ی «۳»

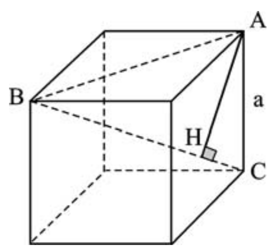
چون هر دو رأس دو سر یک یال نمی‌باشند، بنابراین شکل مسأله به صورت زیر است، مثلث ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است و هر ضلع آن $a\sqrt{2}$ (قطر یک وجه) می‌باشد. از طرفی می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع b برابر است با:



$$S=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow S=\frac{(a\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$S'=a^2\ \Rightarrow\ \frac{S}{S'}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۳-گزینه‌ی «۲»



اگر اندازه‌ی یال مکعب را a فرض کنیم، داریم:

قطر هر وجه $AB=a\sqrt{2}$

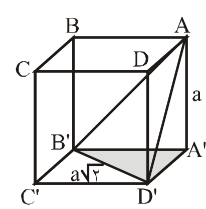
قطر مکعب $d=BC=a\sqrt{3}$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ داریم:

$$AB\times AC=AH\times BC\ \Rightarrow\ a\sqrt{2}\times a=AH\times a\sqrt{3}\ \Rightarrow\ AH=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ AH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

۱۴-گزینه‌ی «۱»

اگر رأس A' را در نظر بگیریم انتهای سه یال مار بر A' نقاط A و D' و B' است، آنگاه یک هرم به قاعده $A'B'D'$ و رأس A از مکعب جدا می‌شود.



سطح قاعده $=\frac{1}{2}a^2$

ارتفاع هرم $=AA'=a$

$V_1=$ **حجم هرم** $=\frac{1}{3}$ (سطح قاعده) × ارتفاع $=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}a^2)\times a=\frac{1}{6}a^3$

حجم مکعب $=a^3$

$V_2 = a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{5}{6}a^3$ حجم قسمت بزرگ‌تر

$V_2 = 5V_1$

۱۵-گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} \text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi R^2 h \end{cases}$$

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{1}{3}\pi (2a)^2 h$$

$$4a^3 = 4a^2 h \Rightarrow h = a$$